

УДК 517.97

**ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО  
ВКЛЮЧЕНИЯ ТИПА ГУРСА-ДАРБУ  
В БЕСКОНЕЧНОЙ ОБЛАСТИ**

**М.А.САДЫГОВ, Дж.Дж.МАМЕДОВА**  
*Бакинский Государственный Университет*  
*misreddin08@rambler.ru*

*В работе получено необходимое условие экстремума для экстремальной задачи дифференциальных включений типа Гурса-Дарбу в бесконечной области. В работе изучены также непрерывная зависимость решения от возмущения дифференциального включения типа Гурса-Дарбу. Такие вопросы в конечной области изучены в [1].*

**Ключевые слова:** Гурса-Дарбу, нормальный интегрант, включение, многозначное отображение.

Пусть  $a : [0, +\infty) \times [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \text{comp} \mathbb{R}^n$ ,  $b_1 : [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \text{comp} \mathbb{R}^n$ ,  $b_2 : [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \text{comp} \mathbb{R}^n$ ,  $M_0 \subset \mathbb{R}^n$  не пусто, где  $\text{comp} \mathbb{R}^n$  совокупность всех не пустых компактных подмножеств  $\mathbb{R}^n$ .

Функцию  $u : [0, +\infty) \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$  назовем абсолютно непрерывной, если ее сужение на любом прямоугольнике  $[0, T] \times [0, S] \subset [0, +\infty) \times [0, +\infty)$  абсолютно непрерывно. Множество всех абсолютно-непрерывных функций, определенных в  $[0, +\infty) \times [0, +\infty)$  с конечной нормой

$$\|u(\cdot)\| = |u(0,0)| + \int_0^{+\infty} |u_t(\tau,0)| d\tau + \int_0^{+\infty} |u_s(0,v)| dv + \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} |u_{ts}(\tau,v)| d\tau dv,$$

обозначим через  $A^n([0, +\infty) \times [0, +\infty))$ .

В дальнейшем равенства и включения, связанные с измеримыми функциями или отображениями понимается как почти всюду.

Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} u_{ts}(t,s) &\in a(t,s,u(t,s)), \\ u_t(t,0) &\in b_1(t,u(t,0)), u_s(0,s) \in b_2(s,u(0,s)), u(0,0) \in M_0 \end{aligned} \quad (1)$$

при  $(t, s) \in [0, +\infty) \times [0, +\infty)$ .

Функция  $u(\cdot) \in A^n([0, +\infty) \times [0, +\infty))$ , удовлетворяющая соотношению (1) называется решением задачи (1). Множество решений задачи (1) обозначим через  $A$ .

Пусть  $g : [0, +\infty) \times [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  нормальный интегрант. Решение включения (1), минимизирующее функционал

$$J(u) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} g(t, s, u(t, s)) dt ds \quad (2)$$

среди всех решений задачи (1) назовем оптимальным. Требуется найти необходимые условия оптимальности решения задачи (1), (2).

Пусть удовлетворяются следующие условия:

1) Существуют функции  $\alpha(\cdot) \in L_1([0, +\infty) \times [0, +\infty))$ ,  $\alpha_1(\cdot) \in L_1[0, +\infty)$ ,  $\alpha_2(\cdot) \in L_1[0, +\infty)$ , где  $\alpha(t, s) \geq 0$ ,  $\alpha_1(t) \geq 0$  и  $\alpha_2(s) \geq 0$  при  $t \in [0, +\infty)$  и  $s \in [0, +\infty)$  такие, что  $\|a(t, s, u)\| \leq \alpha(t, s)(1 + |u|)$ ,  $\|b_1(t, u)\| \leq \alpha_1(t)(1 + |u|)$ ,  $\|b_2(s, u)\| \leq \alpha_2(s)(1 + |u|)$  при  $u \in \mathbb{R}^n$  (см.[1]).

2)  $M_0$  не пусто и существует число  $r > 0$  такое, что  $\|M_0\| = \sup_{x \in M_0} |x| \leq r$ .

3) Многочленные отображения  $a$ ,  $b_1$  и  $b_2$  удовлетворяют условию Каратеодори (см.[2]).

4) Интегрант  $g$  удовлетворяет условию Каратеодори (см.[3]).

Пусть  $u(\cdot) \in A$ . Из соотношения  $u_t(t, 0) \in b_1(t, u(t, 0))$ ,  $u_s(0, s) \in b_2(s, u(0, s))$  вытекает, что

$$\int_0^t u_t(\tau, 0) d\tau \in \int_0^t b_1(\tau, u(\tau, 0)) d\tau, \quad \int_0^s u_s(0, v) dv \in \int_0^s b_2(v, u(0, v)) dv.$$

Поэтому из условия  $u(0, 0) \in M_0$  имеем, что

$$u(t, 0) \in M_0 + \int_0^t b_1(\tau, u(\tau, 0)) d\tau, \quad u(0, s) \in M_0 + \int_0^s b_2(v, u(0, v)) dv.$$

Из условия 1) вытекает, что

$$|u(t, 0)| \leq r + \int_0^t \alpha_1(\tau)(1 + |u(\tau, 0)|) d\tau \leq r + \int_0^{+\infty} \alpha_1(\tau) d\tau + \int_0^t \alpha_1(\tau) |u(\tau, 0)| d\tau,$$

$$|u(0, s)| \leq r + \int_0^s \alpha_2(v)(1 + |u(0, v)|) dv \leq r + \int_0^{+\infty} \alpha_2(v) dv + \int_0^s \alpha_2(v) |u(0, v)| dv.$$

Обозначим  $\beta = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \alpha(\tau, v) d\tau dv$ ,  $\beta_1 = \int_0^{+\infty} \alpha_1(\tau) d\tau$ ,  $\beta_2 = \int_0^{+\infty} \alpha_2(v) dv$ ,  $r_1 = r + \beta_1$  и

$r_2 = r + \beta_2$ .

Применяя неравенство Грануола [4] (теорема 1.1.5) имеем, что

$$|u(t,0)| \leq r_1 \cdot e^{\int_0^t \alpha_1(\tau) d\tau}, \quad |u(0,s)| \leq r_2 \cdot e^{\int_0^s \alpha_2(v) dv}.$$

Поэтому  $|u(t,0)| \leq r_1 \cdot e^{\beta_1}$ ,  $|u(0,s)| \leq r_2 \cdot e^{\beta_2}$  при  $t \in [0, +\infty)$  и  $s \in [0, +\infty)$ .

Так как  $u_{ts}(t,s) \in a(t,s,u(t,s))$  при  $(t,s) \in [0, +\infty) \times [0, +\infty)$ , то имеем, что

$$\int_0^t \int_0^s u_{ts}(\tau, v) d\tau dv \in \int_0^t \int_0^s a(\tau, v, u(\tau, v)) d\tau dv.$$

Поэтому

$$u(t,s) + u(0,0) - u(t,0) - u(0,s) \in \int_0^t \int_0^s a(\tau, v, u(\tau, v)) d\tau dv.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} |u(t,s)| &\leq r + r_1 e^{\beta_1} + r_2 e^{\beta_2} + \int_0^t \int_0^s \alpha(\tau, v) (1 + |u(\tau, v)|) d\tau dv = \\ &= \left( r + r_1 e^{\beta_1} + r_2 e^{\beta_2} + \int_0^t \int_0^s \alpha(\tau, v) d\tau dv \right) + \int_0^t \int_0^s \alpha(\tau, v) |u(\tau, v)| d\tau dv. \end{aligned}$$

Применяя обобщенное неравенство Гронуола [3] (теорема 1.3.15), имеем, что

$$|u(t,s)| \leq \left( r + r_1 e^{\beta_1} + r_2 e^{\beta_2} + \int_0^t \int_0^s \alpha(\tau, v) d\tau dv \right) e^{\int_0^t \int_0^s \alpha(\tau, v) d\tau dv}$$

при  $(t,s) \in [0, +\infty) \times [0, +\infty)$ . Обозначив  $k = \left( r + r_1 e^{\beta_1} + r_2 e^{\beta_2} + \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \alpha(\tau, v) d\tau dv \right) e^{\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \alpha(\tau, v) d\tau dv}$

получим, что  $\|a(t,s,u(t,s))\| \leq \alpha(t,s)(1+k)$  при  $u(\cdot) \in A$ .

Также получим, что

$$\begin{aligned} \|b_1(t, u(t,0))\| &\leq \alpha_1(t)(1 + |u(t,0)|) \leq \alpha_1(t)(1 + r_1 e^{\beta_1}) \\ \|b_2(t, u(t,0))\| &\leq \alpha_2(s)(1 + |u(0,s)|) \leq \alpha_2(s)(1 + r_2 e^{\beta_2}) \end{aligned}$$

при  $u(\cdot) \in A$ .

Обозначим  $\mu_1(t) = \alpha_1(t)(1 + r_1 e^{\beta_1}) + e^{-t}$ ,  $\mu_2(s) = \alpha_2(s)(1 + r_2 e^{\beta_2}) + e^{-s}$ .

Ясно, что  $\mu_1(t) > 0$  и  $\mu_2(s) > 0$  при  $t \in [0, +\infty)$  и  $s \in [0, +\infty)$ . Положим

$\theta_1(t) = \int_0^t \mu_1(\tau) d\tau$ ,  $\theta_2(s) = \int_0^s \mu_2(v) dv$ . Если  $t$  меняется от 0 до  $+\infty$ , то функ-

ция  $\theta_1(t)$  возрастает от 0 до  $d_1 = (1 + r_1 e^{\beta_1}) \int_0^{+\infty} \alpha_1(\tau) d\tau + 1$ . Поэтому существует

обратная функция  $\Phi_1 = \theta_1^{-1} : [0, d_1) \rightarrow [0, +\infty)$ .

Если  $s$  меняется от  $0$  до  $+\infty$ , то функция  $\theta_2(s)$  возрастает от  $0$  до  $d_2 = (1+r_2 e^{\beta_2}) \int_0^{+\infty} \alpha_2(s) ds + 1 = (1+r_2 e^{\beta_2}) \beta_2 + 1$ . Поэтому существует обратная функция  $\Phi_2 = \theta_2^{-1} : [0, d_2) \rightarrow [0, +\infty)$ .

Пусть  $\nu = u \circ (\theta_1^{-1}, \theta_2^{-1}) = u \circ (\Phi_1, \Phi_2)$ . По условию 3) теоремы 1.4.42, теоремы 1.4.43 и 2.3.11 [3] получим, что функции  $\Phi_1 = [0, \tilde{d}_1] \rightarrow \mathbb{R}$  и  $\Phi_2 = [0, \tilde{d}_2] \rightarrow \mathbb{R}$  абсолютно непрерывны при  $\tilde{d}_1 \in [0, d_1)$  и  $\tilde{d}_2 \in [0, d_2)$ . Полагая  $t = \Phi_1(\tau)$  при  $\tau \in [0, d_1)$ ,  $s = \Phi_2(v)$  при  $v \in [0, d_2)$  получим, что задача (1), (2) эквивалентна следующей задаче: требуется минимизировать функционал

$$\int_0^{d_1} \int_0^{d_2} g(\Phi_1(\tau), \Phi_2(v), \nu(\tau, v)) [\mu_1(\Phi_1(\tau))]^{-1} [\mu_2(\Phi_2(v))]^{-1} d\tau dv \quad (3)$$

при условиях

$$\begin{aligned} \nu_{\tau, v}(\tau, v) &\in a(\Phi_1(\tau), \Phi_2(v), \nu(\tau, v)) [\mu_1(\Phi_1(\tau))]^{-1} [\mu_2(\Phi_2(v))]^{-1}, \\ \nu_{\tau}(\tau, 0) &\in b_1(\Phi_1(\tau), \nu(\tau, 0)) [\mu_1(\Phi_1(\tau))]^{-1}, \\ \nu_v(0, v) &\in b_2(\Phi_2(v), \nu(0, v)) [\mu_2(\Phi_2(v))]^{-1}, \nu(0, 0) \in M_0 \end{aligned} \quad (4)$$

при  $(\tau, v) \in [0, d_1] \times [0, d_2]$  (см. [3], стр.437).

Обозначив  $F(\tau, v, x) = a(\Phi_1(\tau), \Phi_2(v), x) [\mu_1(\Phi_1(\tau))]^{-1} [\mu_2(\Phi_2(v))]^{-1}$ ,  $f(\tau, v, x) = g(\Phi_1(\tau), \Phi_2(v), x) [\mu_1(\Phi_1(\tau))]^{-1} [\mu_2(\Phi_2(v))]^{-1}$ ,  $c_1(\tau, x) = b_1(\Phi_1(\tau), x) [\mu_1(\Phi_1(\tau))]^{-1}$ ,  $c_2(v, x) = b_2(\Phi_2(v), x) [\mu_2(\Phi_2(v))]^{-1}$  задачи (3), (4) можно написать в следующем виде

$$I(\nu) = \int_0^{d_1} \int_0^{d_2} f(\tau, v, \nu(\tau, v)) d\tau dv \rightarrow \min \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \nu_{\tau, v}(\tau, v) &\in F(\tau, v, \nu(\tau, v)), \\ \nu_{\tau}(\tau, 0) &\in c_1(\tau, \nu(\tau, 0)), \\ \nu_v(0, v) &\in c_2(v, \nu(0, v)), \nu(0, 0) \in M_0, \text{ где } (\tau, v) \in [0, d_1] \times [0, d_2]. \end{aligned} \quad (6)$$

Получим, что если решение задачи (1) принадлежит в  $A^n([0, +\infty) \times [0, +\infty))$ , то при помощи замены переменных задачи (1), (2) можно привести к задачам в конечной области.

**Лемма 1.** Пусть  $a : [0, T] \times [0, S] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \text{comp} \mathbb{R}^n$ ,  $k(\cdot) \in L_1([0, T] \times [0, S])$ ,

где  $k(t, s) \geq 0$  и  $\int_0^T \int_0^S k(\tau, v) d\tau dv < 1$ ,  $\rho(\cdot) \in L_1([0, T] \times [0, S])$ ,  $\xi_1(\cdot) \in C[0, S]$ ,

$\eta_1(\cdot) \in C[0, T]$ ,  $\varphi(\cdot) \in W_{1,1}^n[0, S]$ ,  $\psi(\cdot) \in W_{1,1}^n[0, T]$ ,  $\varphi(0) = \psi(0)$ , отображение  $(t, s) \rightarrow a(t, s, x)$  измеримо и

$$\rho_x(a(t, s, x), a(t, s, y)) \leq k(t, s) |x - y|$$

при  $x, y \in \mathbb{R}^n$ . Если для  $\bar{u} \in A^n([0, T] \times [0, S])$  удовлетворяются условия

$$\begin{aligned} d(\bar{u}_{ts}(t, s), a(t, s, \bar{u}(t, s))) &\leq \rho(t, s) \\ d(\bar{u}(0, s), \varphi(s)) &\leq \xi_1(s), \quad d(\bar{u}(t, 0), \psi(t)) \leq \eta_1(t) \end{aligned}$$

при  $(t, s) \in [0, T] \times [0, S]$ , то существует решение задачи

$$\begin{aligned} u_{ts}(t, s) &\in a(t, s, u(t, s)), \\ u(t, 0) &= \psi(t), \quad u(0, s) = \varphi(s) \end{aligned}$$

такое, что

$$\left| u_{ts}(t, s) - \bar{u}_{ts}(t, s) \right| \leq \rho(t, s) + \frac{ck(t, s)}{1 - \int_0^T \int_0^S k(\tau, \nu) d\tau d\nu},$$

$$\left| u(t, s) - \bar{u}(t, s) \right| \leq \frac{c}{1 - \int_0^T \int_0^S k(\tau, \nu) d\tau d\nu},$$

где  $c = \max_{(t, s) \in [0, T] \times [0, S]} \left\{ \xi_1(s) + \eta_1(t) + \xi_1(0) + \int_0^T \int_0^S \rho(t, s) dt ds \right\}$ ,  $\rho_x$ -Хаусдорфово рас-

стояние,  $d(x, A) = \inf\{|x - y| : y \in A\}$ .

**Лемма 2.** Пусть  $a : [0, T] \times [0, S] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \text{comp} \mathbb{R}^n$ ,  $k_1(\cdot) \in L_1[0, T]$ ,  $k_2(\cdot) \in L_1[0, S]$ ,  $k_1(t) \geq 0$ ,  $k_2(s) \geq 0$ ,  $\rho(\cdot) \in L_1([0, T] \times [0, S])$ ,  $\xi_1(\cdot) \in C[0, S]$ ,  $\eta_1(\cdot) \in C[0, T]$ ,  $\varphi(\cdot) \in W_{1,1}^n[0, S]$ ,  $\psi(\cdot) \in W_{1,1}^n[0, T]$ ,  $\varphi(0) = \psi(0)$ , отображение  $(t, s) \rightarrow a(t, s, x)$  измеримо и

$$\rho_x(a(t, s, x), a(t, s, y)) \leq k_1(t)k_2(s)|x - y| \quad \text{при } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Если для  $\bar{u} \in A^n([0, T] \times [0, S])$  удовлетворяются условия

$$\begin{aligned} d(\bar{u}_{ts}(t, s), a(t, s, \bar{u}(t, s))) &\leq \rho(t, s), \\ d(\bar{u}(0, s), \varphi(s)) &\leq \xi_1(s), \quad d(\bar{u}(t, 0), \psi(t)) \leq \eta_1(t), \end{aligned}$$

то существует решение задачи

$$\begin{aligned} u_{ts}(t, s) &\in a(t, s, u(t, s)), \\ u(t, 0) &= \psi(t), \quad u(0, s) = \varphi(s) \end{aligned}$$

такое, что

$$\left| u_{ts}(t, s) - \bar{u}_{ts}(t, s) \right| \leq \rho(t, s) + ck_1(t)k_2(s)e^{\int_0^t k_1(\tau) d\tau + \int_0^s k_2(\nu) d\nu},$$

$$\left| u(t, s) - \bar{u}(t, s) \right| \leq ce^{\int_0^t k_1(\tau) d\tau + \int_0^s k_2(\nu) d\nu},$$

где  $c = \max_{(t, s) \in [0, T] \times [0, S]} \left\{ \xi_1(s) + \eta_1(t) + \xi_1(0) + \int_0^T \int_0^S \rho(t, s) dt ds \right\}$ .

**Лемма 3.** Если выполняется условие 1)-3) и существуют  $k(\cdot)$ ,  $\bar{k}(\cdot) \in L_1([0, +\infty) \times [0, +\infty))$ ,  $k_1(\cdot)$ ,  $k_2(\cdot) \in L_1[0, +\infty)$  такие, что

$$\begin{aligned}\rho_x(a(t, s, x), a(t, s, y)) &\leq k(t, s)|x - y|, \\ \rho_x(b_1(t, x_1), b_1(t, y_1)) &\leq k_1(t)|x_1 - y_1|, \\ \rho_x(b_2(s, x_2), b_2(s, y_2)) &\leq k_2(s)|x_2 - y_2|, \\ |g(t, s, x) - g(t, s, y)| &\leq \bar{k}(t, s)|x - y|\end{aligned}$$

при  $|x - \bar{u}(t, s)| \leq \alpha$ ,  $|y - \bar{u}(t, s)| \leq \alpha$ ,  $|x_1 - \bar{u}(t, 0)| \leq \alpha$ ,  $|y_1 - \bar{u}(t, 0)| \leq \alpha$ ,  $|x_2 - \bar{u}(0, s)| \leq \alpha$ ,  $|y_2 - \bar{u}(0, s)| \leq \alpha$ , где  $\bar{u}(\cdot) \in A$ ,  $\alpha > 0$ , то

$$\begin{aligned}\rho_x(F(\tau, v, x), F(\tau, v, y)) &\leq k(\Phi_1(\tau), \Phi_2(v))[\mu_1(\Phi_1(\tau))]^{-1}[\mu_2(\Phi_2(v))]^{-1}|x - y|, \\ \rho_x(c_1(\tau, x_1), c_1(\tau, y_1)) &\leq k_1(\Phi_1(\tau))[\mu_1(\Phi_1(\tau))]^{-1}|x_1 - y_1|, \\ \rho_x(c_2(v, x_2), c_2(v, y_2)) &\leq k_2(\Phi_2(v))[\mu_2(\Phi_2(v))]^{-1}|x_2 - y_2|, \\ |f(\tau, v, x) - f(\tau, v, y)| &\leq \bar{k}(\Phi_1(\tau), \Phi_2(v))[\mu_1(\Phi_1(\tau))]^{-1}[\mu_2(\Phi_2(v))]^{-1}|x - y| \\ \text{при } |x - \bar{v}(\tau, v)| \leq \alpha, |y - \bar{v}(\tau, v)| \leq \alpha, |x_1 - \bar{v}(\tau, 0)| \leq \alpha, |y_1 - \bar{v}(\tau, 0)| \leq \alpha, \\ |x_2 - \bar{v}(0, v)| \leq \alpha, |y_2 - \bar{v}(0, v)| \leq \alpha, \text{ где } \bar{v} = \bar{u} \circ (\Phi_1, \Phi_2).\end{aligned}$$

Пусть  $X$  банахово пространство,  $\bar{x} \in X$ . Если  $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ , то положим (см. [5, с.32])

$$g^{(1)}(\bar{x}; x) = \overline{\lim}_{z \rightarrow \bar{x}, h \downarrow 0} \frac{1}{h}(g(z + hx) - g(z))$$

и

$$\partial g(\bar{x}) = \{p \in X^* : g^{(1)}(\bar{x}; x) \geq \langle p, x \rangle \text{ при } x \in X\}.$$

Положим  $\psi(\tau, v, z, \omega) = \inf\{|u - \omega| : u \in F(\tau, v, z)\}$ ,  $q_1(\tau, x, y) = \inf\{|z - y| : z \in c_1(\tau, x)\}$ ,  $q_2(v, x, y) = \inf\{|u - y| : u \in c_2(v, x)\}$ ,  $q_0(x) = \inf\{|u - x| : u \in M_0\}$ .

**Теорема 1.** Пусть  $(\tau, v) \rightarrow f(\tau, v, z)$ ,  $(\tau, v) \rightarrow F(\tau, v, z)$ ,  $\tau \rightarrow c_1(\tau, x)$ ,  $v \rightarrow c_2(v, x)$  измеримы,  $M_0$ ,  $F(\tau, v, z)$ ,  $c_1(\tau, x)$  и  $c_2(v, y)$  не пусты, компактны при  $(\tau, v, z) \in [0, d_1] \times [0, d_2] \times \mathbb{R}^n$ ,  $(\tau, x) \in [0, d_1] \times \mathbb{R}^n$ ,  $(v, y) \in [0, d_2] \times \mathbb{R}^n$ , существуют функции  $k(\cdot)$ ,  $\bar{k}(\cdot) \in L_1([0, d_1] \times [0, d_2])$ ,  $k_1(\cdot)$ ,  $\bar{k}_1(\cdot) \in L_1[0, d_1]$ ,  $k_2(\cdot)$ ,  $\bar{k}_2(\cdot) \in L_1[0, d_2]$ , где  $\int_0^{d_1} \int_0^{d_2} k(\tau, v) d\tau dv < 1$  или  $k(\tau, v) = \bar{k}_1(\tau)\bar{k}_2(v)$  такие, что

$$\begin{aligned}\rho_x(F(\tau, v, x), F(\tau, v, y)) &\leq k(\tau, v)|x - y|, \\ \rho_x(c_1(\tau, x), c_1(\tau, y)) &\leq k_1(\tau)|x - y|,\end{aligned}$$

$$\rho_x(c_2(v, x), c_2(v, y)) \leq k_2(v)|x - y|,$$

$$|f(\tau, v, x) - f(\tau, v, y)| \leq \bar{k}(\tau, v)|x - y|$$

при  $x, y \in \mathbb{R}^n$ . Тогда, если  $\bar{w} \in A^n([0, d_1] \times [0, d_2])$  является решением задачи (5), (6), то существуют число  $m > 0$  и функции  $v(\cdot) \in A^n([0, d_1] \times [0, d_2])$ , где  $v(d_1, v) = v(\tau, d_2)$  при  $(\tau, v) \in [0, d_1] \times [0, d_2]$ ,  $v_1(\cdot) \in W_{1,1}^n[0, d_1]$ ,  $v_2(\cdot) \in W_{1,1}^n[0, d_2]$  такие, что

$$1) (v_{\tau\tau}(\tau, v), -v(\tau, v)) \in \partial(f(\tau, v, \bar{w}(\tau, v)) + m\psi(\tau, v, \bar{w}(\tau, v), \bar{w}_{\tau\tau}(\tau, v))),$$

$$2) (v_{\tau}(\tau, 0) - \dot{v}_1(\tau), -v_1(\tau)) \in mQ_1(\tau, \bar{w}(\tau, 0), \bar{w}_{\tau}(\tau, 0)),$$

$$3) (v_v(0, v) - \dot{v}_2(v), -v_2(v)) \in mQ_2(v, \bar{w}(0, v), \bar{w}_v(0, v)),$$

$$4) v(0, 0) - v_1(0) - v_2(0) \in mQ_0(\bar{w}(0, 0)),$$

$$5) v_1(d_1) - v(d_1, 0) = 0, v_2(d_2) - v(0, d_2) = 0, v(d_1, d_2) = 0.$$

Используя лемму 1 или лемму 2, теорема 1 доказывается аналогично теореме 3.2.4 [1].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Садыгов М.А. Негладкий анализ и его приложения к экстремальной задаче для включения типа Гурса-Дарбу, Баку, Элм, 1999, 135 с.
2. Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д. и др. Введение в теорию многозначных отображений. Воронеж, 1986, 103 с.
3. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977, 624 с.
4. Нуримов Т.Н., Филатов А.Н., Шарова Л.В. Интегральные неравенства. Ташкент: ФАН АН Узбекской ССР, 1991, 193 с.
5. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М.:Наука, 1988, 280 с.

#### SONSUZ OBLASTDA QURSA-DARBU TIPLI DİFERENSİAL DAXİLOLMA ÜÇÜN EKSTREMAL MƏSƏLƏ

M.A.SADIQOV, C.C.MƏMMƏDOVA

#### XÜLASƏ

İşdə sonsuz oblastda Qursa-Darbu tipli diferensial daxilolma üçün ekstremal məsələnin həllinin optimallığı üçün zəruri şərt alınmışdır. İşdə, həmçinin Qursa-Darbu tipli diferensial daxilolmanın həllinin həyacanlanmadan kəsilməz assıllığı da öyrənilmişdir.

**Açar sözlər:** Qursa-Darbu, normal inteqrant, daxilolma, çoxqiymətli inikas.

**EXTREME PROBLEM FOR THE GOURSAT-DARBOUX TYPE DIFFERENTIAL  
INCLUSION IN THE INFINITE DOMAIN**

**M.A.SADYGOV, J.J.MAMMADOVA**

**SUMMARY**

The necessary condition of extremum is obtained in work for extreme problem of the Goursat-Darboux type differential inclusion in the infinite domain. Continuous dependence of the solution from perturbation of the Goursat-Darboux type differential inclusion is analyzed as well.

**Key words:** Goursat-Darboux, normal integrand, inclusion, set-valued mappings.

*Поступило в редакцию: 08.11.2013 г.*

*Подписано к печати: 04.04.2014 г.*